Μαθημα 14ο 24/11/2016

Πιθανοτητες

Ειδικες Συνεχεις Κατανομες

(1) Ομοιομορφη κατανομη

Ορισμος

Η τ.μ X λεγεται ομοιομορφη στο διαστημα (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$ αν οι δυνατες τιμες x της τ.μ X ανηκουν στο (a, b) και η σ.π.π της τ.μ X ειναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολισμος: $X \sim U(a, b)$

Παρατηρησεις

(1) Η f_X ειναι σ.π.π

i) $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

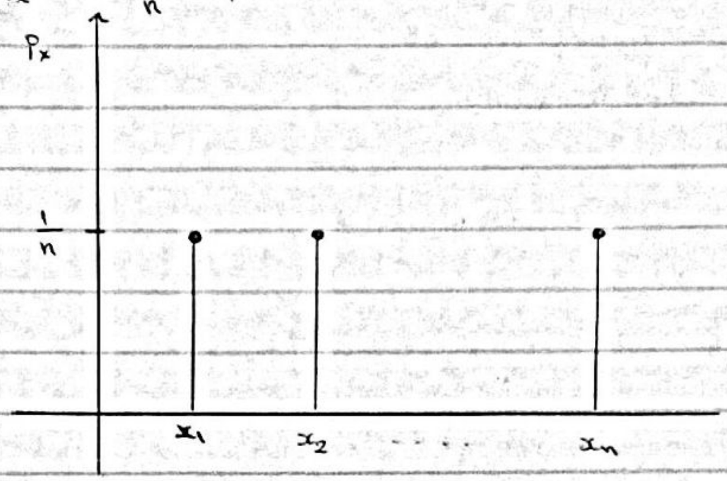
Το (i) ειναι προφανή

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} \underbrace{f_X(x)}_{0}\, dx + \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx + \int_{b}^{+\infty} \underbrace{f_X(x)}_{0}\, dx =$

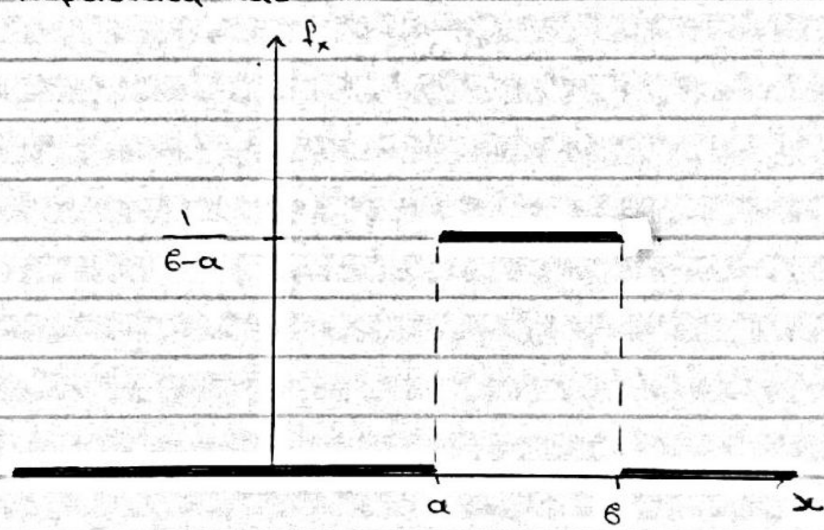
$$= \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$$

ομοιομορφη διακριτή κατανομή

② Εστω η διακριτη τ.μ X με τιμες $x_1, \dots, x_n$ με σ.π $p_X(x) = \frac{1}{n}$, $x = x_1, \dots, x_n$



Γραφικη παρασταση της f_X



③ Επειδη η $X \sim U(α, β)$ ειναι συνεχης τ.μ και επειδή λογω της συνεχειας πιθανοτητος στα ακρα α και β δεν επηρεαζεται η ομοιομορφη κατανομη, θα μπορουσε να οριστει στο $[α, β]$ ή $(α, β]$ ή $[α, β)$

Ιδιοτητες Ομοιομορφης Κατανομης

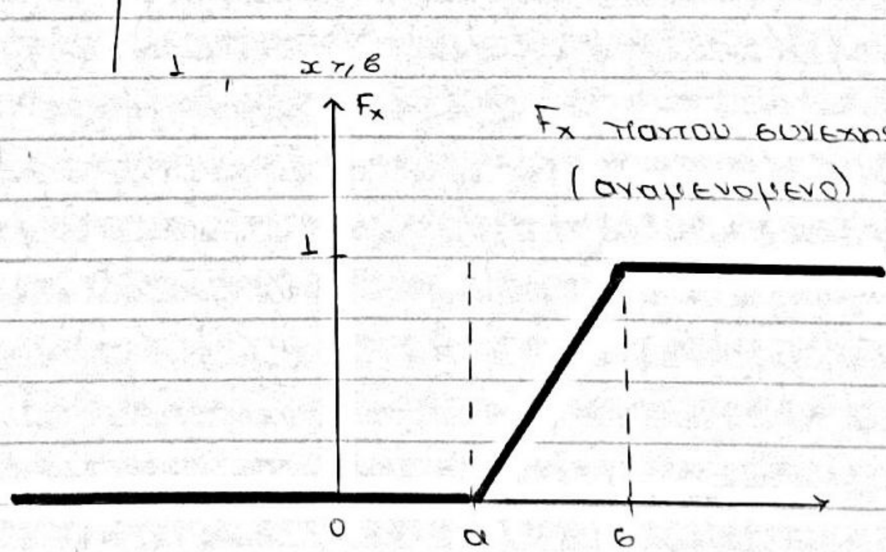
① Προσδιορισμος F_X

$$F_X(x) \overset{\text{op}}{=} P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \text{-----}$$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 \quad , & x \in (-\infty, a) \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \cancel{0\,dt}^{\,0} + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a} \quad , & x \in (a, b) \\ \int_{-\infty}^{a} \cancel{f_X(t)\,dt}^{\,0} + \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt + \int_{b}^{x} \cancel{f_X(t)\,dt}^{\,0} = 1 \quad , & x \in (b, +\infty) \end{cases}$$

Συνοπτικά εχουμε

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} \quad , & a < x < b \\ 1 \quad , & x \ge b \end{cases}$$



F_X παντου συνεχης (αναμενομενο)

② Εστω τ.μ $X \sim U(\alpha,\beta)$. Τοτε οποιαδηποτε υποδιαστηματα του (α,β) ισου μηκους εχουν ισες πιθανοτητες και οι πιθανοτητες αυτες ειναι αναλογες του μηκους των υποδιαστηματων

Εστω (α_1,β_1) και $(\alpha_2,\beta_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ με $\beta_1-\alpha_1=\beta_2-\alpha_2=\ell$

$$P(\alpha_1 < X < \beta_1) = \begin{cases} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_X(x)\,dx \\ F_X(\beta_1)-F_X(\alpha_1) \end{cases} = \frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\ell$$

$$P(\alpha_2 < X < \beta_2) = \dots = \frac{\beta_2-\alpha_2}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha}\ell$$

$$\Rightarrow P(\alpha_1 < X < \beta_1) = P(\alpha_2 < X < \beta_2) = \frac{1}{\beta-\alpha}\ell$$

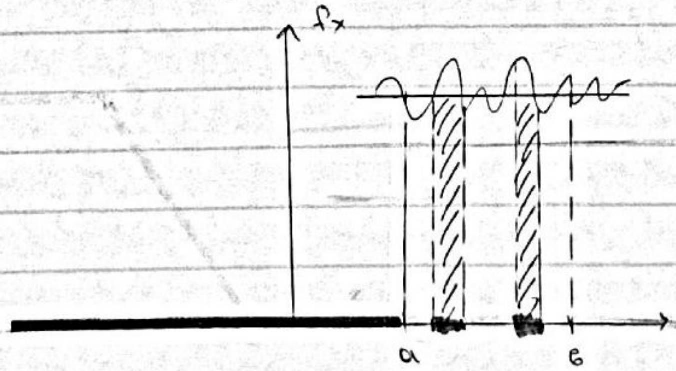
Αντιστροφο

Εστω μια τ.μ X με τιμες στο (α,β). Εστω οτι για την X ισχυει: Οποιαδηποτε υποδιαστηματα του (α,β) ισου μηκους παραγουν ισες πιθανοτητες. Τοτε $X \sim U(\alpha,\beta)$

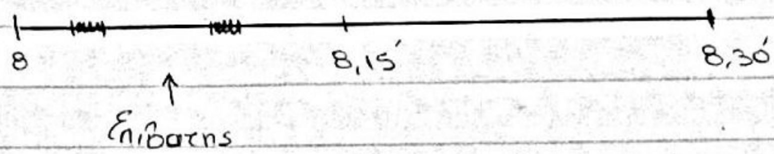
Αποδειξη εχω μαζα = εχω πυκνοτητα

Με ΘΜΤ (Απει)

Διαισθητικα ιδεα αποδειξης



Παραδειγμα



Να υπολογιστουν οι πιθανοτητες

α) Ο επιβατης να περιμενει στη σταση λιγοτερο απο 5min

β) Ο επιβατης να περιμενει στη σταση περισσοτερο απο 10min

απαντηση

Εστω X ο χρονος που φτανει ο επιβατης στη σταση

Το X ειναι τυχαια μεταβλητη με τιμες στο (8.00, 8.30)

Αρα $X \sim U(8.00, 8.30)$

α) $P(8.10 < X < 8.15 \ \underset{\cup}{ή}\ 8.25 < X < 8.30) = ⊛$

Εφοσον ο χρονος ομοιομορφη κατανομη τοτε εχουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8.30 - 8.00}, & 8.00 < x < 8.30 \\ 0, & αλλού \end{cases}$$

$$⊛ = P(8.10 < X < 8.15) + P(8.25 < X < 8.30) =$$

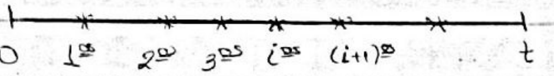
$$= \int_{8.10}^{8.15} \frac{1}{8.30 - 8.00}\,dx + \int_{8.25}^{8.30} \frac{1}{8.30 - 8.00}\,dx = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

β) $P(8.00 < X < 8.05 \ ή\ 8.15 < X < 8.20) = \dots = \frac{1}{3}$

Εκθετικη Κατανομη

Θεωρουμε μια διαδικασια Poisson με παραμετρο λ ($\lambda>0$)

$*$ = αφιξεις στη διαδικασια Poisson



Σε μια διαδικασια Poisson εχει ενδιαφερον το πληθος των αφιξεων. Εστω $N(t)$ στο $(0,t)$

Αποδειξαμε(?) οτι το $N(t) \sim P(\lambda t)$ και επομενως

$$p_{N(t)}(\tau) = P(N(t)=\tau) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\tau}}{\tau!}, \quad \tau = 0,1,\dots$$

Εστω X ο χρονος μεταξυ δυο διαδοχικων αφιξεων.

Τιμες $X: x>0$

Η X ειναι συνεχης τ.μ. Αρκει να βρω την σ.π.π f_X ή την α.σ.κ F_X

Συνηθως σε συνεχη μεγεθη προσπαθουμε να βρουμε την F_X γιατι η F_X συνδεεται με πιθανοτητα αφου οριζεται

$$F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ευρεση της $F_X(x)$ ή στην ευρεση της $P(X>x)$ αφου

$F_X(x) = 1 - P(X>x)$

$$\forall x>0, \quad P(X>x) = P\binom{\text{καμια αφιξη}}{\text{σε χρονο } x} = P(N(x)=0) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^0}{0!} \Rightarrow P(X>x) = e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

$$\Rightarrow F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x) = 1 - P(X>x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

Αν $x<0$ $\quad F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

Συνοπτικα η α.σ.κ του χρονου X μεταξυ διαδοχικων αφιξεων

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Είναι η F_X α.σ.κ?

Ναι, γιατί

(i) F_X αύξουσα (αν πάρουμε παράγωγο ...)

(ii) F_X παντού συνεχής

(iii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

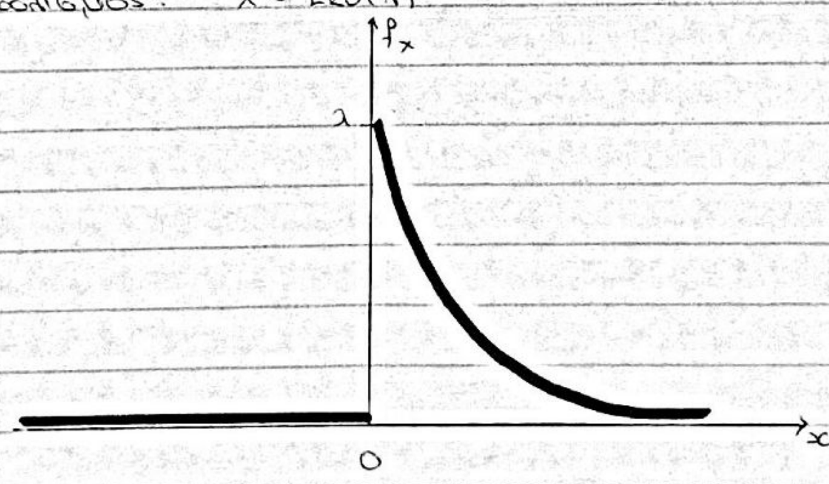
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

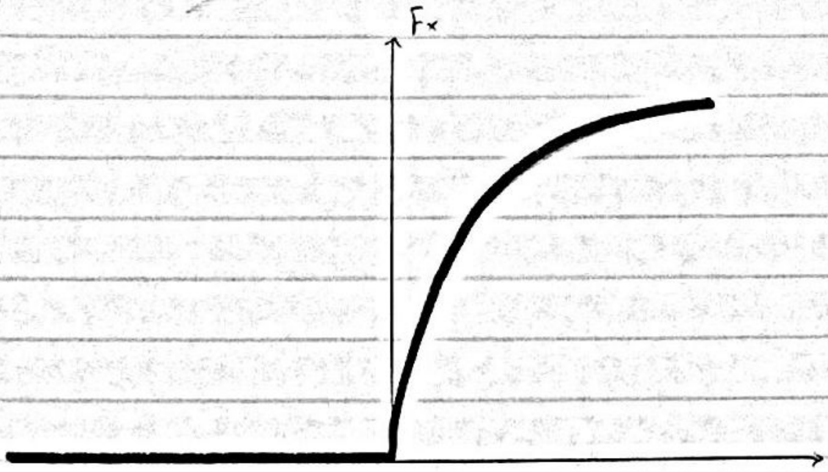
Ορισμός

Μια τ.μ X θα λέγεται εκθετική με παράμετρο $\lambda > 0$ αν το σύνολο των δυνατών της τιμών είναι $x > 0$ και η σ.π.π της X δίνεται:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim \text{Εκθ}(\lambda)$





Παρατηρησεις

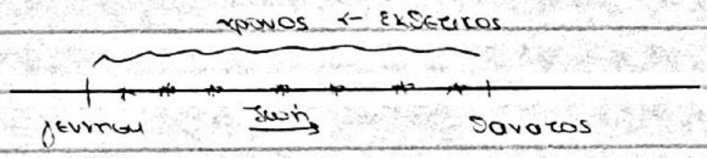
① Η f_X ειναι σ.π.π

α) $f_X \geq 0$

β) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

② Η εκθετικη κατανομη ειναι γνωστη και ως κατανομη χρονου ζωης

Γιατι ?



Ιδιοτητα Αμνησιας Εκθετικης Κατανομης

Προταση

Εστω τ.μ X με κατανομη $Εκθ(\lambda)$. Αν $x_0, x > 0$ τοτε

$$P(X>x_0+x \mid X>x_0) = P(X>x)$$